O que são Métodos de Monte Carlo (MMC) ?

Muitos processos das ciências físicas, biológicas e sociais admitem técnicas de simulação para solução de problemas e processos que não possuem resposta analítica. Alguns processos a simular incluem um elemento aleatório e recebem o nome de Métodos de Monte Carlo. O emprego de uma simulação de Monte Carlo economiza a construção de equipamentos caros. Ela pode ser usada, por exemplo no estudo de choques de fótons com elétrons, dispersão de nêutrons e de fenômenos complicados similares. Os métodos de Monte Carlo são úteis também em condições nas quais a experimentação direta é impossível, tais como em estudos de propagação de epidemias de cólera - as quais, por definição, não podem ser induzidas por experimentos em populações humanas. Além disso, as técnicas de Monte Carlo se aplicam algumas vezes na resolução de problemas matemáticos que hoje não podem ser resolvidos por métodos diretos, ou onde uma solução direta é muito cara ou requer muito tempo.

Um exemplo clássico do emprego dos Métodos de Monte Carlo para resolver problemas de Matemática pura é a determinação de π (a relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro) por meios probabilísticos. No início do século XVIII, Jorge Luis Leclerc, Conde de Buffon, um naturalista francês, comprovou que, se uma agulha muito fina de comprimento a é lançada sobre uma mesa em que estão desenhadas linhas paralelas e equidistantes, a probabilidade de que a agulha cruze uma das linhas é $2a/\pi b$ onde b é distância entre linhas paralelas. O notável aqui é que apareça o fator π = 3,1415926… que, em geometria elementar se aproxima através de perímetros de polígonos regulares inscritos em uma circunferência de raio ½. O resultado de Buffon implica no fato de que, se essa agulha se lança num grande número de vezes, nos dá o valor aproximado de $2a/\pi b$ e, portanto de π, já que a e b são conhecidos. Os primeiros experimentos deste tipo deram um valor de 3,1519 (baseado em 5000 testes) e um de 3,155 (baseado em 3204 testes) em meados do século XIX.

Existe outro método estatístico de calcular o valor de π, que é o círculo inscrito no quadrado. Veja **[Cunha Jr., 2021]**.

Números aleatórios

Ainda que os métodos de Monte Carlo estejam baseados nos jogos (por exemplo, o lançamento da agulha no cálculo de π), é conveniente utilizar as chamadas tabelas de dígitos ou de números aleatórios, evitando experimentos físicos e passando a usar computadores. Essas tabelas consistem em uma grande quantidade de páginas onde os dígitos de zero a nove estão arrumados ao azar, tal como apareceriam se fossem produzidos por uma máquina de jogo, que pudesse dar a cada dígito a mesma possibilidade de ser escolhido. De fato, podemos produzir nós mesmos as tabelas removendo, por exemplo, bolas numeradas de uma cesta ou construindo uma roleta perfeita; mas, na prática, tais tabelas se criam geralmente em computadores eletrônicos. Por exemplo, um método é começar com um número de 4 dígitos, tal como 3571, e elevá-lo ao quadrado, dando 12**7520**41. Os quatro dígitos do meio, neste caso 7520, se consideram agora como um novo conjunto de 4 dígitos (se necessário, adicionamos um zero à esquerda, para que o quadrado tenha oito dígitos[1]). Logo, 7520 se eleva ao quadrado 56**5504**00, e 5504 se considera como o conjunto seguinte de 4 dígitos. Continuando desta forma, obteremos uma tabela de dígitos pseudoaleatórios, que é bastante satisfatória para muitos fins práticos.

Ainda que as tabelas de números aleatórios se construam de modo que os dígitos possam ser considerados variáveis aleatórias com uma distribuição uniforme discreta de função $f(x) = 1/10$ *para* $x = 0,1,2, \ldots$, *ou* 9, eles podem ser usados simular valores de qualquer variável aleatória discreta e também para variáveis aleatórias contínuas. Por exemplo, se nos interessa simular um experimento no qual lançamos repetidamente três moedas, podemos fazer que 0, 2, 4, 6, 8 representem caras, 1, 3, 5 7, 9 representem coroas e podemos considerar qualquer conjunto de 3 dígitos como o resultado de haver jogado as três moedas. Então, usando a tabela 1, teremos:

Jogada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Número	480	280	085	265	303	288	295	388	127	222
Resultado de Caras	3	3	2	2	1	3	1	2	1	3
Probabi-lidade	1/8	1/8	3/8	3/8	3/8	1/8	3/8	3/8	3/8	1/8

Tabela 1 – Dez Jogadas, com números aleatórios, de três moedas

```
col_pag = 10   # numero de colunas na página
lin_pag = 10   # numero de linhas na página
seed    = 2222 # valor inicial da "semente"
zc      = 0    # contadores
zd      = 0

inverte = False # Avisa quando é preciso inverter o número

matriz  = []    # lista total vazia

for zd in range(lin_pag):
  linha = []    # linha vazia
  for zc in range(col_pag):
    seed=seed**2
    seed=str(seed)
    if len(seed) < 8:
      seed = "0"+seed
      inverte=True
    seed=seed[2:6]
    linha.append(seed)
    seed=int(seed)
```

1 Os autores não consideraram a possibilidade do quadrado ainda ser insuficiente. Aí eu multiplico a semente atual por 9 e divido por 8.

```
    if inverte:
      seed=seed*9/8
      inverte = False

  matriz.append(linha)

for zd in range(lin_pag):
  print(matriz[zd])
```

Tabela 2 – Programa gerador de tabela de aleatórios em Python.

```
['9372', '1165', '3572', '1483', '1992', '2208', '8752', '9437', '0569', '2376']
['4492', '1780', '1684', '8913', '4415', '4922', '2260', '1076', '6531', '6539']
['7585', '5322', '3236', '4716', '2406', '7888', '7478', '9204', '7136', '9224']
['0821', '7404', '3805', '4780', '8484', '9782', '6875', '2656', '0543', '3168']
['0362', '3104', '1940', '7636', '7966', '4571', '8940', '9236', '3036', '2172']
['7069', '9707', '2258', '0985', '2794', '8064', '3011', '0661', '2978', '8684']
['4431', '6337', '1575', '4806', '2329', '4242', '7743', '9540', '0116', '3456']
['1165', '3572', '1483', '1992', '2208', '8752', '9437', '0569', '2376', '4492']
['1780', '1684', '8913', '4415', '4922', '2260', '1076', '6531', '6539', '7585']
['5322', '3236', '4716', '2406', '7888', '7478', '9204', '7136', '9224', '0821']
```

Tabela 3 – Números gerados pelo programa anterior.

Caracterização formal do método

Segundo o professor Américo Barbosa da Cunha Jr. [Cunha Jr, 2021], um Método de Montecarlo é caracterizado por três etapas, representadas na tabela a seguir:

ETAPA	1 - Pré-processamento	2 - Processamento	3 - Pós-processamento
O QUE É FEITO	Geração de cenários	Solução de equações do modelo	Computação das estatísticas
DADOS	Distribuição conhecida (Objeto estocástico) Gerador	Modelo computacional	Distribuição estimada Dados de saída

Tabela 4 – Caracterização de um Método de Monte Carlo.

Se o método envolver números aleatórios para sua execução, então ele é um Método de Montecarlo.

Um pouco de história

Em dezembro de 1942 os Estados Unidos da América finalmente reuniram no Novo México alguns dos cientistas mais criativos do planeta, no projeto Manhattan, que criaria a bomba atômica. O matemático polonês Stanislaw Marcin Ulam juntou-se ao projeto em 1943 com sua jovem esposa, Françoise. Ele ficou na equipe do físico Edward Teller, numa relação um tanto conflituosa. Ulam não concordava com Teller, por exemplo, sobre a possibilidade de se iniciar a fusão de uma bomba de hidrogênio. Não havia vislumbre da possibilidade de solução analítica para o problema. Em 1946, após um período de infecção cerebral e penosa recuperação, Ulam desenvolveu uma solução genial para o problema, com base em um Método de Montecarlo. Ele e Teller desenvolveram também um modelo chamado de *Dispositivo de Teller-Ulam*, um engenho termonuclear capaz de liberar megatons de energia. Ele serviu de modelo para várias bombas do mundo. Até mesmo a bomba-H soviética Tsar, de 50 megatons – a mais poderosa da história - foi criada com base nesse esquema.

Aplicações

Os MMC podem ser usados em diversas situações, além da física nuclear, já vista:

1. Na otimização de custos de propostas de obras e projetos em geral;
2. No estudo de epidemias;
3. Na análise de possíveis resultados em jogos;
4. Nos esportes de equipe, para análise de resultados;
5. No mercado de capitais, para avaliação de cenários;
6. Em econometria;

Ferramentas

Como vimos, a linguagem Python é excelente para realização de cálculos envolvendo métodos de Monte Carlo (R também é uma opção). Na verdade, só precisamos do Python e um programador treinado, pois há várias bibliotecas disponíveis gratuitamente, inclusive para visualização dos dados.

O Microsoft Excel ou o LibreOffice Calc são também ferramentas para trabalhar com Métodos de Montecarlo, por apresentarem uma série de funções estatísticas e randômicas. Mas existe uma ferramenta da Oracle, chamada Crystal Ball. Ela se adapta ao Excel e é usada por 8 em 10 empresas de *Fortune*. É bastante poderosa e fácil de usar. **[Pedroso, 2021]**.

> *"O Oracle Crystal Ball é o principal aplicativo baseado em planilha para modelagem preditiva, previsão, simulação e otimização. Ele oferece uma visão incomparável dos fatores críticos que afetam o risco. A análise e otimização de riscos abrangentes permitem decisões estratégicas e operacionais confiáveis."*
>
> Oracle

Referências

- **[Cunha Jr, 2021] da Cunha Jr., Américo Barbosa** : "*Método de Monte Carlo*". Essa aula introduz o método de Monte Carlo, que é a principal ferramenta para realizar simulações estocásticas. Várias aplicações da técnica são exemplificadas, bem como os fundamentos teóricos que justificam seu funcionamento. Os slides dessa aula estão disponíveis no link [http://www.americocunha.org/uq]. Vídeo elaborado pelo Prof. Americo Cunha (UERJ). Diponível no site <https://youtu.be/3FpVGK4jnGk?t=1060>.
- **[Kiviet, 2012]** Jan F. Kiviet: "*Monte Carlo Simulation for Econometricians*". Now Publishers. 2012.
- **[Manly, 2020]** Bryan F.J. Manly: "*Randomization, Bootstrap and Monte Carlo Methods in Biology*". Taylor & Francis Ltd. 2020.
- **[Miller, 1973] Miller, Irwin ; Freund, John E.** : "*Probabilidad y e Estadistica para Ingenieros*". Ed. Reverté, 1973. O item 5.5 do livro deu origem a este artigo.
- **[Niederreiter, 1997]** Harald Niederreiter: "*Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods* 1996". Ed. Springer Nature. 1997. Série Lecture Notes in Statistics.
- **[Pedroso, 2021] Pedroso, Luiz Henrique Tadeu Ribeiro**: "*Conhecendo a Simulação de Monte Carlo*". Disponível em <https://youtu.be/ZB4sZxbwRtI>.
- **[Sobol, 1976]** L.M.Sobol: "*Método de Montecarlo*". Ed. Mir, Moscou. 1976. Série Lecciones Populares de Matemáticas.
-